Charge et décharge d'un condensateur à travers une résistance

1. Charge d'un condensateur avec un courant constant

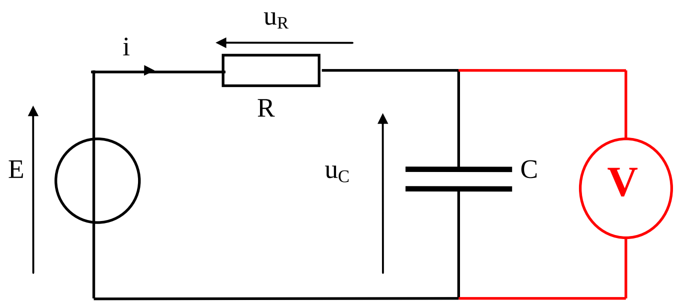
Lorsque l'on charge un condensateur avec un courant constant I, la loi de charge est linéaire :

$$\boxed{UC(t) = \frac{I.t}{C} + UC(0)}$$

2. Charge d'un condensateur à travers une résistance

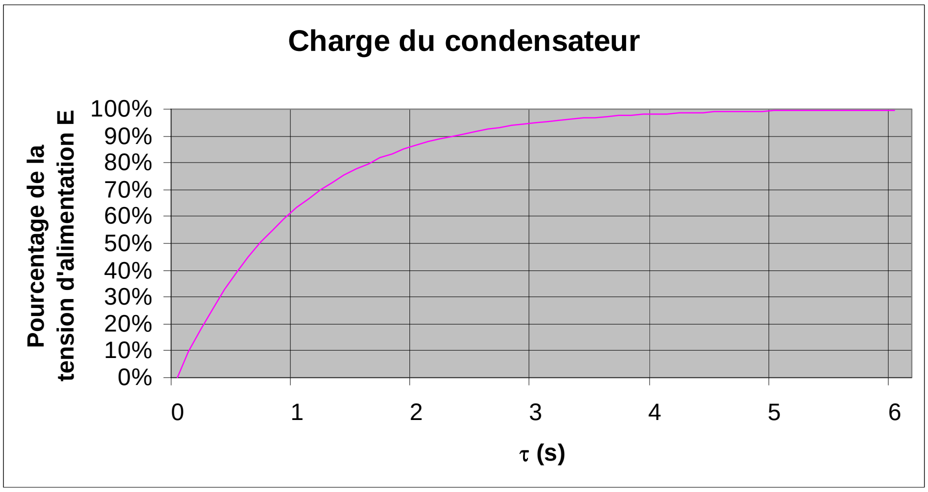
2.1. Évolution de la d.d.p. aux bornes du condensateur :

Dans le montage de la figure ci-dessous, un condensateur, préalablement déchargé, est alimenté par un générateur, de f.e.m. E et de résistance interne négligeable, à travers un élément résistif de valeur R.



Montage pour le relevé de la courbe de charge d'un condensateur.

La d.d.p. u_C aux bornes du condensateur est relevée à intervalles de temps réguliers. La courbe de la figure ci-dessous représente les variations de u_C (en pourcentage de la tension d'alimentation E) en fonction du temps (l'abscisse est graduée en fonction de la constante de temps tau (τ)).



La courbe de charge d'un condensateur est une **exponentielle**.
Quand, **la ddp u_C ne varie plus, le condensateur est chargé.**

2.2. Durée de charge:

La durée de charge d'un condensateur de capacité C à travers un élément résistif de résistance R **est fonction du produit R.C**.

Le produit R.C est appelé **<u>Constante de temps du circuit</u>** et représenté par la lettre grecque **<u>tau (τ)</u>**

$\boxed{\tau = R \cdot C}$ R en ohms
C en farads
τ en secondes.

Plus la constante de temps est grande, plus la charge du condensateur est lente.

Par exemple pour R = 10 kΩ et C = 1000 µF on a :

$\tau = R.\ C = (10.10^{3})\ .\ (1000.10^{-6})$ soit **<u>τ = 10 s</u>**

Théoriquement, la charge d'un condensateur ne se termine jamais.

Pratiquement, un condensateur est considéré comme totalement chargé au bout d'une durée t égale à 5 fois la constante de temps, la d.d.p. à ses bornes est alors égale à 99% de la d.d.p. d'alimentation.

On peut regarder l'évolution de u_C (t) (en pourcentage de la tension d'alimentation E) en fonction du temps (gradué en fonction de τ) :

Temps (s)	1τ	2τ	3τ	4τ	5τ
u_C (t)	63% de E	86% de E	95% de E	98% de E	99% de E

<u>Remarque</u>: **La constante de temps est fonction de la capacité du condensateur et de la résistance en série avec le condensateur.**

2.3. Détermination par le calcul:

<u>Hypothèse</u>: Le condensateur est totalement déchargé à l'instant initial.

En instantané, pour un condensateur, nous avons la relation : $i_c(t) = C\dfrac{du_c(t)}{dt}$.

En écrivant la loi des mailles on obtient : $E = u_r(t) + u_c(t)$.

De plus, $u_r(t) = R \cdot i_c(t)$ soit $u_r(t) = RC\dfrac{du_c(t)}{dt}$.

On obtient ainsi l'équation différentielle : $E = RC\dfrac{du_c(t)}{dt} + u_c(t)$.

On démontre que l'équation différentielle a pour solution :

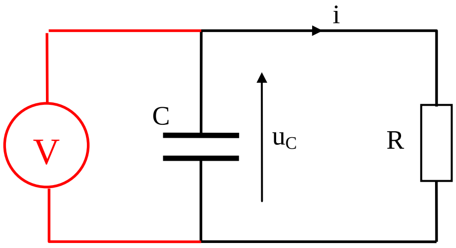
$\boxed{u_c(t) = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$ avec τ = R.C.

Uniquement dans le cas de l'hypothèse (à t = 0 s, u_c = 0 V).

3. Décharge d'un condensateur à travers une résistance:

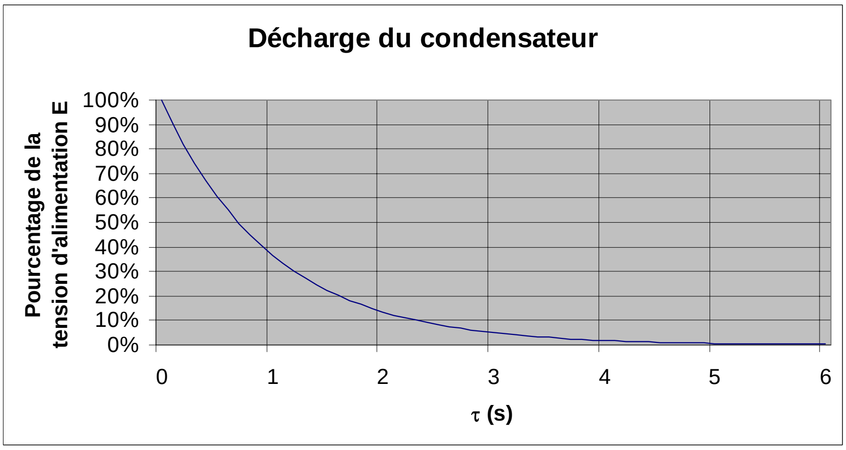
3.1. Évolution de la d.d.p aux bornes du condensateur:

Un condensateur, préalablement chargé sous une d.d.p. E, est relié à un élément résistif R selon le schéma ci-dessous :



Montage pour le relevé de la courbe de décharge d'un condensateur.

La variation de la d.d.p. u_C (t) aux bornes du condensateur en fonction du temps est représentée figure ci-dessous, les valeurs du montage étant :



Au **début** de la décharge, **la d.d.p u_C est maximale et égale à E**.

Théoriquement, la décharge d'un condensateur ne se termine jamais.
Pratiquement, au bout **d'une durée égale à 5 fois la constante de temps**, soit 50 s dans l'exemple (pour R = 10 kΩ et C = 1000 µF), le condensateur est complètement déchargé, **la d.d.p. à ses bornes est nulle**.

On peut regarder l'évolution de u_C (t) (en pourcentage de la tension d'alimentation E) en fonction du temps (gradué en fonction de τ) :

Temps (s)	1τ	2τ	3τ	4τ	5τ
u_C (t)	37% de E	14% de E	5% de E	2% de E	1% de E

3.2. Détermination par le calcul:

***Hypothèse**: Le condensateur est totalement chargé à l'instant initial*

De la même manière qu'en 1.3, on obtient l'équation différentielle : $0 = RC\dfrac{du_c(t)}{dt} + u_c(t)$.

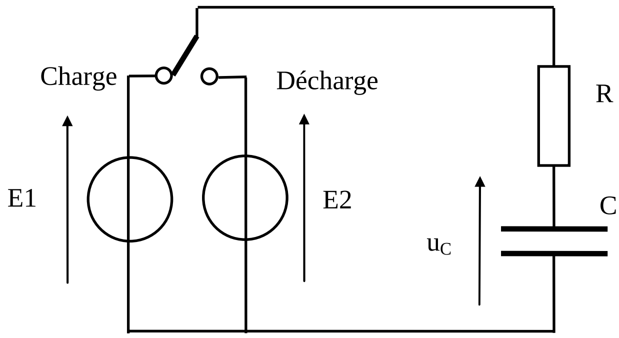
On démontre que l'équation différentielle a pour solution :

$$\boxed{u_c(t) = E \cdot e^{-t/\tau}}$$ avec τ = R.C.

Uniquement dans le cas de l'hypothèse (à t = 0 s, u_c = E).

4. Formule générale de la charge et de la décharge d'un condensateur à travers une résistance :

==> Soit le montage suivant (avec **E1 > E2**):



Ce montage est l'association des 2 montages précédents (charge et décharge d'un condensateur). Mais sur ce montage le condensateur ne se décharge pas vers 0 V comme précédemment mais vers la tension E2.

La formule générale de la tension aux bornes du condensateur est :

$$\boxed{u_c(t) = E_{th}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) + V_{ini} \cdot e^{-t/\tau}}$$

E_{th} vaut E1 ou E2 suivant le position de l'interrupteur, cette tension peut être aussi notée V_f (tension finale). En effet, c'est la tension vers laquelle le condensateur tend à se charger ou décharger.
V_{ini} indique la tension initiale aux bornes du condensateur (à t = 0).

On déduit de la formule précédente une relation qui permet de calculer le temps t_a nécessaire pour passer de V_{ini} à V_a ; V_a tension intermédiaire entre V_{ini} et V_f :

$$\boxed{t_a = \tau \cdot \ln\left(\frac{V_f - V_{ini}}{V_f - V_a}\right)}$$

ln est la fonction mathématique du logarithme népérien.

Remarque : si on fait tendre V_a vers V_f, le terme $\left(\frac{V_f - V_{ini}}{V_f - V_a}\right)$ tend vers $+\infty$, et le temps t_a tend vers $+\infty$.

Ce qui est logique puisque en théorie V_a tend vers V_f sans jamais l'atteindre.

Application : on reprend notre exemple R = 10 kΩ et C = 1000 µF, soit τ = 10 s. On suppose le condensateur chargé initialement à 2 V, E1 vaut de 5 V, E2 vaut de 2 V et l'interrupteur est en position charge. Au bout de combien de temps le condensateur atteint-il une tension de 4 V ?

On a $V_{ini} = 2\ V$, $V_f = 5\,V$ et $V_a = 4\,V$. Reste à appliquer la formule précédente : $t_{4V} = 10 \cdot \ln\left(\frac{5-2}{5-4}\right)$

Le condensateur atteint la tension de 4V au bout d'environ 10,99 secondes. On peut vérifier que $u_c(t_{4V}) = 4\,V$: $u_c(t_{4V}) = 5 \cdot \left(1 - e^{-10,99/10}\right) + 2 \cdot e^{-10,99/10} = 4\,V$